第 51 卷 第 1 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 51 No. 1
2012 年 1 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jan. 2012

具正负系数和阻尼项的高阶微分方程的振动定理*

杨甲山
（邵阳学院理学与信息科学系，湖南 邵阳 422004）

摘　要： 研究了一类同时具有正负系数和阻尼项的高阶非线性变时滞泛函微分方程的振动性，通过引入参数函数和 Riccati 变换，获得了该类方程振动的判别准则，这些准则改善了对方程的条件限制，所得结论推广并改进了现有文献中的一系列结果，并给出了具体例子用以说明主要结论。

关键词： 正负系数；泛函微分方程；变时滞；阻尼项；Riccati 变换；振动性
中图分类号： O175.7　**文献标志码：** A　**文章编号：** 0529－6579（2012）01－0030－05

Oscillation Theorems of Higher Order Differential Equations with Positive and Negative Coefficients and Damping Term

YANG Jiashan
（Department of Science and Information, Shaoyang University, Shaoyang 422004, China）

Abstract: The oscillation for a class of higher order nonlinear variable delay functional differential equation with positive and negative coefficients and damping term is discussed. By introducing parameter function and the generalized Riccati transformation, some criteria for the oscillation of the equation are proposed. These criteria improve the restriction of the conditions for the equation. And these results improve and generalize some corresponding known results. Some examples are given to illustrate the main results.

Key words: positive and negative coefficient; functional differential equation; variable delay; damping term; Riccati transformation; oscillation

关于中立型时滞泛函微分方程定性理论的研究，在理论上和实际应用中均有非常重要的意义。例如，中立型时滞微分方程在高速计算机连接开关电路的无损耗传输网络以及弹性体上质点振动问题中都有着其实际应用背景。因此，在这一领域出现了许多研究成果[1-13]。近年来，在计算机科学研究中出现了一些同时具有正负系数的中立型时滞微分方程的数学模型，使得这类方程的研究日益受到重视[9-13]。但我们注意到关于具有正负系数的一阶方程或线性方程的研究成果较多[9-13]，而对同时具有正负系数和阻尼项的高阶微分方程的研究尚未涉及。本文考虑如下一类同时具有正负系数和阻尼项的高阶非线性变时滞泛函微分方程

$$[A(t)\varphi(x^{(n-1)}(t))]' + B(t)\varphi(x^{(n-1)}(t)) + \sum_{i=1}^{m} Q_i(t)f_i(\varphi(x(\sigma(t)))) - \sum_{j=1}^{l} R_j(t)g_j(\varphi(x(\sigma(t)))) = 0 \qquad (1)$$

其中 $t \geqslant t_0, t_0 \geqslant 0$ 为常数；$n \geqslant 2$ 为偶数；$m \geqslant 1, l \geqslant 1$ 为整数；$\varphi(u) = |u|^{\gamma-1}u$（$\gamma > 0$ 为常数）；$A(t) \in C([t_0, +\infty), \mathbb{R}), B(t), Q_i(t), R_j(t) \in C([t_0, +\infty), [0, +\infty)), i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,l$（下同，略）；$f_i(u), g_j(u) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，且 $uf_i(u) > 0 (u \neq 0)$，$ug_j(u) > 0 (u \neq 0)$。

本文只讨论方程（1）的非平凡解。方程（1）

* 收稿日期：2011－04－10
基金项目：湖南省教育厅科研基金重点资助项目（09A082）
作者简介：杨甲山（1963 年生），男，副教授；E-mail：syxyyjs@163.com

的解 $x(t)$ 称为是最终正解（或最终负解），如果存在常数 $\mu > t_0$，使得当 $t \geqslant \mu$ 时，$x(t) > 0$（或 $x(t) < 0$）；方程（1）的解 $x(t)$ 称为是振动的，如果它既不最终为正也不最终为负，否则称它是非振动的；方程（1）称为是振动的，如果它的所有解都是振动的。为了方便，在本文中假设关于 t 的不等式（如未说明的）是对一切充分大的实数 t 成立的。并考虑如下假设：

(H_1) $\sigma(t) \in C^1([t_0, +\infty), (0, +\infty))$，$\sigma(t) \leqslant t$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma(t) = +\infty$，$\sigma'(t) > 0$；

(H_2) 存在常数 $\alpha_i > 0, \beta_j > 0$，使得 $\dfrac{f_i(u)}{u} \geqslant \alpha_i (u \neq 0)$，$\dfrac{g_j(u)}{u} \leqslant \beta_j (u \neq 0)$；

(H_3) $A(t) \in C^1([t_0, +\infty), \mathbb{R})$，且 $A(t) > 0$，$A'(t) \geqslant 0$；最终 $\Phi(t) = \sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i Q_i(t) - \sum\limits_{j=1}^{l}\beta_j R_j(t) > 0$；

(H_4) $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\left[\dfrac{1}{A(u)}\exp\left(-\int_{t_0}^{u}\dfrac{B(s)}{A(s)}\mathrm{d}s\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}u = +\infty$。

1　若干引理

引理 1[1]　设 u 在 $[t_0, +\infty)$ 上是正的 n 次可微函数，$u^{(n)}(t)$ 最终定号，则存在 $t^* \geqslant t_0$ 和整数 $l(0 \leqslant l \leqslant n)$，当 $u^{(n)}(t) \geqslant 0$ 时，$n + l$ 为偶数；当 $u^{(n)}(t) \leqslant 0$ 时，$n + l$ 为奇数，使得

当 $l > 0$ 时，有 $u^{(k)}(t) > 0, t \geqslant t^*, k = 0, 1, \cdots, l-1$；且当 $l \leqslant n-1$ 时，有 $(-1)^{l+k}u^{(k)}(t) > 0$，$t \geqslant t^*, k = l, l+1, \cdots, n-1$。

引理 2[2]　设 u 满足引理 1 的条件，且 $u^{(n-1)}(t)u^{(n)}(t) \leqslant 0$ $(t \geqslant t^*)$，则对任何 $\theta \in (0, 1)$，存在常数 $M > 0$，使得对一切充分大的 t 有 $u'(\theta t) \geqslant M t^{n-2} u^{(n-1)}(t)$。

引理 3[3]　设 a, b 为非负实数，则 $a^{\lambda} - \lambda a b^{\lambda-1} + (\lambda - 1)b^{\lambda} \geqslant 0$ $(\lambda > 1)$，等号成立当且仅当 $a = b$。

引理 4　设 (H_1) − (H_4) 成立，$x(t)$ 是方程（1）的最终正解，则存在 $t_1 \geqslant t_0$，使得当 $t \geqslant t_1$ 时，$x^{(n-1)}(t) > 0, x^{(n)}(t) \leqslant 0$，$x'(t) > 0$。

证明　因为 $x(t)$ 是方程（1）的最终正解，故存在 $t_1 \geqslant t_0$，使得当 $t \geqslant t_1$ 时，$x(t) > 0$，$x(\sigma(t)) > 0$。由方程（1）并注意到条件 (H_2) 和 (H_3)，得

$$[A(t)\varphi(x^{(n-1)}(t))]' + B(t)\varphi(x^{(n-1)}(t)) \leqslant$$
$$-\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i Q_i(t) - \sum_{j=1}^{l}\beta_j R_j(t)\right]\varphi(x(\sigma(t))) =$$
$$-\Phi(t)\varphi(x(\sigma(t))) < 0 \tag{2}$$

所以

$$\left[A(t)\varphi(x^{(n-1)}(t))\exp\left(\int_{t_0}^{t}\frac{B(s)}{A(s)}\mathrm{d}s\right)\right]' =$$
$$\{[A(t)\varphi(x^{(n-1)}(t))]' + B(t)\varphi(x^{(n-1)}(t))\}\cdot$$
$$\exp\left(\int_{t_0}^{t}\frac{B(s)}{A(s)}\mathrm{d}s\right) < 0 \tag{3}$$

因此函数 $A(t)\varphi(x^{(n-1)}(t))\exp\left(\int_{t_0}^{t}\dfrac{B(s)}{A(s)}\mathrm{d}s\right)$ 是递减的，并且 $x^{(n-1)}(t)$ 最终定号，且能断言：

$$x^{(n-1)}(t) > 0,\ t \geqslant t_1 \tag{4}$$

事实上，若 $x^{(n-1)}(t) < 0$，$t \geqslant t_1$。由（3）式，得 $A(t)|x^{(n-1)}(t)|^{\gamma-1}x^{(n-1)}(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\dfrac{B(s)}{A(s)}\mathrm{d}s\right) \leqslant -M$，其中 $M = A(t_1)|x^{(n-1)}(t_1)|^{\gamma-1}[-x^{(n-1)}(t_1)]\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t_1}\dfrac{B(s)}{A(s)}\mathrm{d}s\right) > 0$。于是 $[-x^{(n-1)}(t)]^{\gamma} \geqslant \dfrac{M}{A(t)}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\dfrac{B(s)}{A(s)}\mathrm{d}s\right)$，即

$$x^{(n-1)}(t) \leqslant -M^{\frac{1}{\gamma}}\left[\frac{1}{A(t)}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{B(s)}{A(s)}\mathrm{d}s\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

进一步有

$$x^{(n-2)}(t) \leqslant x^{(n-2)}(t_1) -$$
$$M^{\frac{1}{\gamma}}\int_{t_1}^{t}\left[\frac{1}{A(u)}\exp\left(-\int_{t_0}^{u}\frac{B(s)}{A(s)}\mathrm{d}s\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}u$$

在上式中令 $t \to +\infty$，注意到 (H_4)，得 $\lim\limits_{t\to+\infty}x^{(n-2)}(t) = -\infty$。类似可得 $\lim\limits_{t\to+\infty}x^{(j)}(t) = -\infty$，$j = 0, 1, 2, \cdots, n-3$，这与 $x(t) > 0$ 矛盾！故（4）式成立。

由（2）知

$$[A(t)\varphi(x^{(n-1)}(t))]' = \{A(t)[x^{(n-1)}(t)]^{\gamma}\}' =$$
$$A'(t)[x^{(n-1)}(t)]^{\gamma} + \gamma A(t)[x^{(n-1)}(t)]^{\gamma-1}x^{(n)}(t) \leqslant 0$$

由此推得

$$x^{(n)}(t) \leqslant 0,\ t \geqslant t_1 \tag{5}$$

再由（5）和引理 1，因为 n 是偶数，所以 l 为奇数，故 $x'(t) > 0, t \geqslant t_1$。引理证毕。

2　主要结果和证明

定理 1　设 (H_1) − (H_4) 成立，如果存在函数 $\rho(t) \in C^1([t_0, +\infty), (0, +\infty))$ 使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\rho(s)\left[\Phi(s) - \Psi(s)\left|\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{B(s)}{A(s)}\right|^{\gamma+1}\right]\mathrm{d}s = +\infty \tag{6}$$

其中

$$\Psi(t) = \frac{(\gamma+1)^{-(\gamma+1)}A(t)}{[\theta M\sigma^{n-2}(t)\sigma'(t)]^{\gamma}} \tag{7}$$

常数 $\theta \in (0,1)$ 和 $M > 0$ 如引理2。则方程（1）是振动的。

证明 设方程（1）存在非振动解 $x(t)$，不失一般性，设 $x(t) > 0, x(\sigma(t)) > 0$，$t \geq t_1 \geq t_0$。由引理4知，$x^{(n-1)}(t) > 0, x^{(n)}(t) \leq 0, x'(t) > 0$。定义广义的 Riccati 变换

$$V(t) = \rho(t)\frac{A(t)\varphi(x^{(n-1)}(t))}{\varphi(x(\theta\sigma(t)))} = \rho(t)A(t)\frac{[x^{(n-1)}(t)]^{\gamma}}{[x(\theta\sigma(t))]^{\gamma}},\ t \geq t_1$$

则 $V(t) > 0\ (t \geq t_1)$，且由（2）式和引理2，可以得到

$$V'(t) = \rho'(t)\frac{A(t)\varphi(x^{(n-1)}(t))}{\varphi(x(\theta\sigma(t)))} + \rho(t)\frac{[A(t)\varphi(x^{(n-1)}(t))]'}{\varphi(x(\theta\sigma(t)))} - \rho(t)A(t)\frac{[x^{(n-1)}(t)]^{\gamma}}{[x(\theta\sigma(t))]^{\gamma+1}}\cdot$$

$$\gamma\theta x'(\theta\sigma(t))\sigma'(t) \leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}V(t) + \rho(t)\frac{-B(t)\varphi(x^{(n-1)}(t)) - \Phi(t)\varphi(x(\sigma(t)))}{\varphi(x(\theta\sigma(t)))} - \rho(t)A(t)\frac{[x^{(n-1)}(t)]^{\gamma+1}}{[x(\theta\sigma(t))]^{\gamma+1}}\gamma\theta M\sigma^{n-2}(t)\sigma'(t) \leq$$

$$[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{B(t)}{A(t)}]V(t) - \rho(t)\Phi(t) - \gamma\theta M\sigma^{n-2}(t)\sigma'(t)[\rho(t)A(t)]^{\frac{-1}{\gamma}}[V(t)]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \tag{8}$$

由引理3，有

$$\lambda ab^{\lambda-1} - a^{\lambda} \leq (\lambda-1)b^{\lambda},\ a > 0, b > 0, \lambda > 1 \tag{9}$$

现取

$$\lambda = \frac{\gamma+1}{\gamma};$$

$$a = [\gamma\theta M\sigma^{n-2}(t)\sigma'(t)]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}[\rho(t)A(t)]^{\frac{-1}{\gamma+1}}|V(t)|,$$

$$b = (\frac{\gamma}{\gamma+1})^{\gamma}\left|\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{B(t)}{A(t)}\right|^{\gamma}\cdot [\gamma\theta M\sigma^{n-2}(t)\sigma'(t)]^{\frac{-\gamma^2}{\gamma+1}}[\rho(t)A(t)]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}},$$

将其代入（9）式，并注意到（7）式，得

$$|V(t)|\left|\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{B(t)}{A(t)}\right| - \gamma\theta M\sigma^{n-2}(t)\sigma'(t)[\rho(t)A(t)]^{\frac{-1}{\gamma}}[V(t)]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \leq$$

$$\frac{\rho(t)A(t)}{(\gamma+1)^{(\gamma+1)}}\left|\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{B(t)}{A(t)}\right|^{\gamma+1}[\theta M\sigma^{n-2}(t)\sigma'(t)]^{-\gamma} = \rho(t)\Psi(t)\left|\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{B(t)}{A(t)}\right|^{\gamma+1} \tag{10}$$

将（10）式代入（8）式，对于 $t \geq t_1$，有

$$V'(t) \leq -\rho(t)\left[\Phi(t) - \Psi(t)\left|\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{B(t)}{A(t)}\right|^{\gamma+1}\right]$$

两边从 t_1 到 t 积分得

$$\int_{t_1}^{t}\rho(s)\left[\Phi(s) - \Psi(s)\left|\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{B(s)}{A(s)}\right|^{\gamma+1}\right]ds \leq V(t_1) - V(t) \leq V(t_1)$$

上式取上极限，则得到与（6）式矛盾！定理证毕。

定理2 设 $(H_1)-(H_4)$ 成立，如果存在常数 $k > \gamma$ 及函数 $\rho(t) \in C^1([t_0,+\infty),(0,+\infty))$，使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t^k}\int_{t_0}^{t}(t-s)^k\rho(s)\cdot\left[\Phi(s) - \Psi(s)\left|\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{B(s)}{A(s)} - \frac{k}{t-s}\right|^{\gamma+1}\right]ds = +\infty \tag{11}$$

其中常数 $\theta \in (0,1)$ 和 $M > 0$ 如引理2，$\Psi(t)$ 定义如（7）式。则方程（1）是振动的。

证明 设方程（1）存在非振动解 $x(t)$，不失一般性，设 $x(t) > 0, x(\sigma(t)) > 0, t \geq t_1 \geq t_0$。同定理1的证明，得到（8）式，即当 $s \geq t_1$ 时，有

$$\rho(s)\Phi(s) \leq -V'(s) + [\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{B(s)}{A(s)}]V(s) - \gamma\theta M\sigma^{n-2}(s)\sigma'(s)[\rho(s)A(s)]^{\frac{-1}{\gamma}}[V(s)]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$$

上式两边同乘以 $(t-s)^k$，并从 t_1 到 $t\ (t \geq t_1)$ 积分，由分部积分法得

$$\int_{t_1}^{t}(t-s)^k\rho(s)\Phi(s)ds \leq -\int_{t_1}^{t}(t-s)^kV'(s)ds + \int_{t_1}^{t}(t-s)^k[\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{B(s)}{A(s)}]V(s)ds - \int_{t_1}^{t}(t-s)^k\gamma\theta M\sigma^{n-2}(s)\sigma'(s)[\rho(s)A(s)]^{\frac{-1}{\gamma}}\cdot$$

$$[V(s)]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}ds = (t-t_1)^kV(t_1) + \int_{t_1}^{t}(t-s)^k\left[\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{B(s)}{A(s)} - \frac{k}{t-s}\right]V(s)ds - \int_{t_1}^{t}(t-s)^k\gamma\theta M\sigma^{n-2}(s)\sigma'(s)\cdot [\rho(s)A(s)]^{\frac{-1}{\gamma}}[V(s)]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}ds \tag{12}$$

现取

$$\lambda = \frac{\gamma+1}{\gamma};$$

$$a = [\gamma\theta M\sigma^{n-2}(s)\sigma'(s)]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}[\rho(s)A(s)]^{\frac{-1}{\gamma+1}}|V(s)|,$$

$$b = (\frac{\gamma}{\gamma+1})^{\gamma}\left|\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{B(s)}{A(s)} - \frac{k}{t-s}\right|^{\gamma}\cdot$$

$$[\gamma\theta M\sigma^{n-2}(s)\sigma'(s)]^{\frac{-\gamma^2}{(\gamma+1)}}[\rho(s)A(s)]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}},$$

将其代入（9）式，并注意到（7）式，得

$$\left|\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}-\frac{B(s)}{A(s)}-\frac{k}{t-s}\right| |V(s)| -$$

$$[\gamma\theta M\sigma^{n-2}(s)\sigma'(s)][\rho(s)A(s)]^{\frac{-1}{\gamma}}|V(s)|^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \leqslant$$

$$\frac{(\gamma+1)^{-(\gamma+1)}\rho(s)A(s)}{[\theta M\sigma^{n-2}(s)\sigma'(s)]^{\gamma}}\left|\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}-\frac{B(s)}{A(s)}-\frac{k}{t-s}\right|^{\gamma+1}=$$

$$\rho(s)\Psi(s)\left|\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}-\frac{B(s)}{A(s)}-\frac{k}{t-s}\right|^{\gamma+1} \qquad (13)$$

综合（12）式、（13）式，得

$$\int_{t_1}^{t}(t-s)^k\rho(s)\Phi(s)\,\mathrm{d}s \leqslant (t-t_1)^kV(t_1)+$$

$$\int_{t_1}^{t}(t-s)^k\rho(s)\Psi(s)\left|\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}-\frac{B(s)}{A(s)}-\frac{k}{t-s}\right|^{\gamma+1}\mathrm{d}s$$

即 $\frac{1}{t^k}\int_{t_1}^{t}(t-s)^{k-\gamma-1}\rho(s)\Big[\Phi(s)(t-s)^{\gamma+1}-\Psi(s)\left|\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}-\frac{B(s)}{A(s)}\right)(t-s)-k\right|^{\gamma+1}\Big]\mathrm{d}s \leqslant \left(1-\frac{t_1}{t}\right)^kV(t_1)$，于是有

$$\frac{1}{t^k}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{k-\gamma-1}\rho(s)\Big[\Phi(s)(t-s)^{\gamma+1}-\Psi(s)\cdot$$

$$\left|\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}-\frac{B(s)}{A(s)}\right)(t-s)-k\right|^{\gamma+1}\Big]\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{t^k}\int_{t_0}^{t_1}(t-s)^{k-\gamma-1}\rho(s)\Big[\Phi(s)(t-s)^{\gamma+1}-\Psi(s)\cdot$$

$$\left|\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}-\frac{B(s)}{A(s)}\right)(t-s)-k\right|^{\gamma+1}\Big]\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{t^k}\int_{t_1}^{t}(t-s)^{k-\gamma-1}\rho(s)\Big[\Phi(s)(t-s)^{\gamma+1}-\Psi(s)\cdot$$

$$\left|\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}-\frac{B(s)}{A(s)}\right)(t-s)-k\right|^{\gamma+1}\Big]\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\rho(s)\Phi(s)\,\mathrm{d}s+\left(1-\frac{t_1}{t}\right)^kV(t_1)=$$

$$C+\left(1-\frac{t_1}{t}\right)^kV(t_1)$$

其中 $C=\int_{t_0}^{t_1}\rho(s)\Phi(s)\,\mathrm{d}s$ 为常数。上式取上极限，即得与（11）式矛盾！定理证毕。

注：若方程（1）中 $n=2$，$m=l=1$，$B(t)\equiv 0$，$R(t)\equiv 0$，$f(u)=u$，$\sigma(t)=t$，并在定理 2 中取 $\rho(t)=1$，于是由定理 2，可得如下结果。

推论 1　设 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}[A(u)]^{\frac{-1}{\gamma}}\mathrm{d}u=+\infty$，如果存在常数 $k>\gamma$，使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t^k}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{k-\gamma-1}\cdot$$

$$\left[(t-s)^{\gamma+1}Q(s)-\left(\frac{k}{\gamma+1}\right)^{\gamma+1}A(s)\right]\mathrm{d}s=+\infty$$

则方程 $[A(t)\varphi(x'(t))]'+Q(t)\varphi(x(t))=0$（$t\geqslant t_0$）是振动的。

推论 1 就是文献［3］中的定理 4.7.5，也是 Li 等[4]于 1995 年推广了 Kamenev 的结果所得到的结论，本文将其推广到了同时具有正负系数和阻尼项的高阶非线性变时滞泛函微分方程（1）。

例 1　考虑如下同时具有正负系数和阻尼项的变时滞高阶微分方程

$$[A(t)\varphi(x^{(n-1)}(t))]'+$$

$$B(t)\varphi(x^{(n-1)}(t))+Q(t)f(\varphi(x(\sigma(t))))-$$

$$R(t)g(\varphi(x(\sigma(t))))=0,\quad (t\geqslant 1) \quad (14)$$

这是方程（1）的特殊情形：$m=l=1$，$t_0=1$。

（i）若取 $n=4$，$\gamma=\frac{5}{3}$，$A(t)=t^{\frac{2}{3}}$，$B(t)=\frac{1}{t^2}$，$\sigma(t)=\frac{t}{2}$，$Q(t)=t^2\sin^2t+\frac{1}{t}+\frac{1}{6\sqrt{t}}$，$R(t)=2t^2\sin^2t+\frac{5}{3t}$，$f(u)=u[6+\ln^{\gamma}(1+u^2)]$，$g(u)=\frac{u}{\sqrt{9^{-1}+\sin^4(u+1)}}$，则

$$\frac{f(u)}{u}=6+\ln^{\gamma}(1+u^2)\geqslant 6=\alpha(u\neq 0),$$

$$\frac{g(u)}{u}=\frac{1}{\sqrt{9^{-1}+\sin^4(u+1)}}\leqslant 3=\beta(u\neq 0),$$

$$\Phi(t)=\alpha Q(t)-\beta R(t)=6\left(t^2\sin^2t+\frac{1}{t}+\frac{1}{6\sqrt{t}}\right)-$$

$$3\left(2t^2\sin^2t+\frac{5}{3t}\right)=\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}>0,$$

$$\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{A(u)}\exp\left(-\int_{t_0}^{u}\frac{B(s)}{A(s)}\mathrm{d}s\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}u=$$

$$\int_{1}^{t}\left[u^{-\frac{2}{3}}\exp\left(-\int_{1}^{u}s^{-\frac{8}{3}}\mathrm{d}s\right)\right]^{\frac{3}{5}}\mathrm{d}u=$$

$$\int_{1}^{t}\left[u^{-\frac{2}{3}}\exp\left(\frac{3}{5}u^{-\frac{5}{3}}-\frac{3}{5}\right)\right]^{\frac{3}{5}}\mathrm{d}u=$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{9}{25}}\int_{1}^{t}u^{-\frac{2}{5}}\exp\left(\frac{9}{25}u^{-\frac{5}{3}}\right)\mathrm{d}u\geqslant$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{9}{25}}\int_{1}^{t}u^{-\frac{2}{5}}\left(1+\frac{9}{25}u^{-\frac{5}{3}}\right)\mathrm{d}u=$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{9}{25}}\left(\frac{5}{3}t^{\frac{3}{5}}-\frac{27}{80}t^{-\frac{16}{15}}-\frac{319}{240}\right)\to+\infty\ (t\to+\infty)$$

即条件（H_1）－（H_4）是成立的。为了简单，在定理 1 中我们取 $\rho(t)=1$，并注意到（7）式，则

$$\int_{t_0}^{t}\rho(s)\left[\Phi(s)-\Psi(s)\left|\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}-\frac{B(s)}{A(s)}\right|^{\gamma+1}\right]\mathrm{d}s=$$

$$\int_1^t\left[\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{\sqrt{s}}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{8}{3}}\frac{s^{\frac{2}{3}}}{(\theta M s^2 2^{-3})^{\frac{5}{3}}}(s^{-\frac{8}{3}})^{\frac{8}{3}}\right]ds=$$

$$\int_1^t\left[\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{\sqrt{s}}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{8}{3}}\frac{2^5}{(\theta M)^{\frac{5}{3}}}s^{-\frac{88}{9}}\right]ds\to+\infty\ (t\to+\infty)$$

因此定理1的条件全部满足，于是由定理1知此时方程（14）是振动的。

（ii）若取 $n=2$，$\gamma=1$，$A(t)=t^{\frac{2}{3}}$，$B(t)=\frac{1}{t^2}$，$\sigma(t)=\frac{t}{2}$，$Q(t)=t^2\sin^2 t+\frac{1}{t}$，$R(t)=2t^2\sin^2 t+\frac{1}{t}$，$f(u)=u[2+\ln^{\gamma}(1+u^2)]$，$g(u)=\frac{u}{\sqrt{1+\sin^4(u+1)}}$，类似地有

$$\Phi(t)=\alpha Q(t)-\beta R(t)=$$

$$2\left(t^2\sin^2 t+\frac{1}{t}\right)-\left(2t^2\sin^2 t+\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}>0;$$

$$\int_{t_0}^t\left[\frac{1}{A(u)}\exp\left(-\int_{t_0}^u\frac{B(s)}{A(s)}ds\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}du=$$

$$\int_1^t u^{-\frac{2}{3}}\exp\left(-\int_1^u s^{-\frac{8}{3}}ds\right)du=$$

$$e^{-\frac{3}{5}}\int_1^t u^{-\frac{2}{3}}\exp\left(\frac{3}{5}u^{-\frac{5}{3}}\right)du\geqslant$$

$$e^{-\frac{3}{5}}\int_1^t u^{-\frac{2}{3}}\left(1+\frac{3}{5}u^{-\frac{5}{3}}\right)du\to+\infty\ (t\to+\infty)$$

即条件（H_1）–（H_4）是成立的。现在定理2中取 $\rho(t)=1$，$k=2>\gamma$，并注意到当 $n=2$ 时 $M=\theta=1$，则

$$\frac{1}{t^k}\int_{t_0}^t(t-s)^k\rho(s)\Phi(s)ds=\frac{1}{t^2}\int_1^t(t-s)^2\frac{1}{s}ds=$$

$$\frac{1}{t^2}\left[t^2\ln t-\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}+2t\right]\to+\infty\ (t\to+\infty),$$

$$\frac{1}{t^k}\int_{t_0}^t(t-s)^k\rho(s)\Psi(s)\left|\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}-\frac{B(s)}{A(s)}-\frac{k}{t-s}\right|^{\gamma+1}ds=$$

$$\frac{1}{t^2}\int_1^t(t-s)^2\frac{2^{-2}}{2^{-1}}s^{\frac{2}{3}}\left|s^{-\frac{8}{3}}+\frac{2}{t-s}\right|^2 ds=$$

$$\frac{1}{t^2}\left(-\frac{29}{10}-\frac{27}{440}t^{-\frac{5}{3}}+\frac{13}{8}t+\frac{6}{5}t^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{22}t^2-2\ln t\right)<+\infty\ (t\to+\infty)$$

所以 $\frac{1}{t^k}\int_{t_0}^t(t-s)^k\rho(s)\left[\Phi(s)-\Psi(s)\left|\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}-\frac{B(s)}{A(s)}-\frac{k}{t-s}\right|^{\gamma+1}\right]ds\to+\infty\ (t\to+\infty)$，因此定理2的条件全部满足，于是由定理2知此时方程（14）是振动的。

参考文献：

[1] AGARWAL R P, GRACE S R, REGAN D O. Oscillation theory for difference and functional differential equations [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[2] GYOR I, LADAS G. Oscillation theory for delay differential equations with applications [M]. Clarendon: Oxford, 1991.

[3] AGARWAL R P, BOHNER M, LI W T. Nonoscillation and oscillation: theory for functional differential equations [M]. New York: Marcel Dekker, 2004.

[4] LI H J, YEH C C. An integral criterion for oscillation of nonlinear differential equations [J]. Math Japonica, 1995, 41:185 – 188.

[5] AGARWAL R P, GRACE S R, O'REGAN D. Oscillation criteria for certain nth order differential equations with deviating arguments[J]. J Math Anal Appl, 2001, 262: 601 – 622.

[6] WANG Q R. Oscillation criteria for even order nonlinear damped differential equations [J]. Acta Math Hungar, 2002, 95: 169 – 178.

[7] WU H W, WANG Q R, XU Y T. Oscillation criteria for certain even order nonlinear functional differential equations[J]. Dynamic Systems and Applications, 2004, 13: 129 – 144.

[8] 张全信,俞元洪. 偶阶半线性阻尼泛函微分方程的振动性[J]. 应用数学学报, 2010, 33(4): 601 – 610.

[9] MANOJLOVIC J, SHOUKAKU Y, TANIGAWA T, et al. Oscillation criteria for second order differential equations with positive and negative coefficients[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 181(2): 853 – 863.

[10] 仉志余，王晓霞，林诗仲. 非线性二阶中立型时滞微分方程的振动和非振动准则[J]. 系统科学与数学, 2006, 26(3): 325 – 334.

[11] 李秀云,刘召爽,俞元洪. 具有正负系数的二阶中立型时滞微分方程的振动性[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(6): 1028 – 1030.

[12] 李瑞红,王幼斌. 二阶变系数中立型时滞微分方程的振动性[J]. 数学的实践与认识,2009,39(12): 238 – 243.

[13] 杨甲山. 具有正负系数的二阶中立型方程的振动性定理[J]. 华东师范大学学报:自然科学版, 2011, 2: 10 – 16.